2°/ Si $n = 6p \Rightarrow 2n + 3n \equiv 26p + 36p$

$\equiv (2^{3p})^2 + 3^{6p} \pmod 7 \equiv 1 + 1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$

Si $n = 6p + 1 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 2 + 3 \equiv 5 \pmod 7$

Si $n = 6p + 2 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 2 \equiv 6 \pmod 7$

Si $n = 6p + 3 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 1 + 6 \equiv 0 \pmod 7$

Si $n = 6p + 4 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 4 \equiv 1 \pmod 7$

Si $n = 6p + 5 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 5 \equiv 2 \pmod 7$

*Conclusion* : $2^n + 3^n \equiv 0 \,(7)$ ssi $n = 6p + 3$ où $p \in \mathbb{N}$

**Solution 3 :**

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod 4$ ou $x \equiv 1 \pmod 4$ ou $x \equiv 2 \pmod 4$

ou $x \equiv 3 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ ou $x^2 \equiv 0 \pmod 4$

ou $x^2 \equiv 9 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$

d'où : pour tout $x \in \mathbb{Z}$ $x^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$

$x^2 - 3y^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod 4$

| $y^2$ \ $x^2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (1) |
| 1 | 1 | 2 |

$\rightarrow (x^2+y^2)$

d'où les restes possibles de $x^2 - 3y^2$ sont 0 ou 1 ou 2 .

1°/ Supposons qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

tels que : $x^2 - 3y^2 + 4z = 3 \Rightarrow x^2 - 3y^2 + 4z \equiv \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 - 3y^2 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow 3$ est le reste de la division euclidienne de $x^2 - 3y^2$ par 4.

ce qui est impossible d'après 1°/